2009 年上海市 T I 杯高二年级数学竞赛答案

个 人 赛 试 题

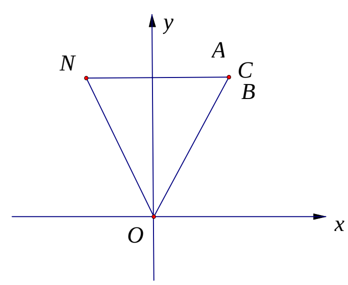
一、填空题

题 号	1	2	3	4
答 案	2. 60473	0. 255	$20°54'19''$	0. 857
题 号	5	6	7	8
答 案	$(-1.493, 1.785)$	$19°28'16''$	$\{5, 6\}$	448 或 548 或 949

二、**解** 设经过 t 秒后，导弹 B 恰好在点 C 处命中目标，并设 $\angle xOB=\alpha$，则

$$NC=0.3t, OC=0.7t, \angle NOC=105°-\alpha, \angle ONC=75°,$$

在$\triangle ONC$ 中，由正弦定理



$$\frac{NC}{\sin\angle NOC}=\frac{OC}{\sin\angle ONC},$$

即
$$\frac{0.3t}{\sin(105°-\alpha)}=\frac{0.7t}{\sin 75°},$$

$$\sin(105°-\alpha)=\frac{3}{7}\sin 75°,$$

所以 $105°-\alpha=\arcsin\left(\frac{3}{7}\sin 75°\right)$，或者$105°-\alpha=180°-\arcsin\left(\frac{3}{7}\sin 75°\right)$，

故$\alpha=80.546°$，或者$\alpha=-50.546°$（舍去）.

所以，所求的发射角$\angle xOB=80.546°$.

三、**解** （1）$\left(4\sin^2 x-3\right)\left(4\cos^2 x-3\right)=16\sin^2 x\cos^2 x-12(\sin^2 x+\cos^2 x)+9$

$$=4\sin^2 2x-3 .$$

（2）记 $A_k=\left(4\sin^2 0-3\right)\left(4\sin^2\frac{\pi}{2^k}-3\right)\left(4\sin^2\frac{2\pi}{2^k}-3\right)\left(4\sin^2\frac{3\pi}{2^k}-3\right)\cdots$

$$\cdot\left(4\sin^2\frac{(2^{k-1}-1)\pi}{2^k}-3\right)\left(4\sin^2\frac{\pi}{2}-3\right),$$

由（1），当 $k\geq 2$ 时，有

$$A_k=\left(4\sin^2 0-3\right)\left(4\sin^2\frac{\pi}{2}-3\right)\left(4\sin^2\frac{\pi}{2^k}-3\right)\left(4\sin^2\frac{(2^{k-1}-1)\pi}{2^k}-3\right)\cdots$$

$$\cdot\left(4\sin^2\frac{(2^{k-2}-1)\pi}{2^k}-3\right)\left(4\sin^2\frac{(2^{k-2}+1)\pi}{2^k}-3\right)\left(4\sin^2\frac{2^{k-2}\pi}{2^k}-3\right)$$

$$=\left(4\sin^2 0-3\right)\left(4\sin^2\frac{\pi}{2^{k-1}}-3\right)\cdots\left(4\sin^2\frac{(2^{k-2}-1)\pi}{2^{k-1}}-3\right)\left(4\sin^2\frac{\pi}{4}-3\right)$$

$$=-A_{k-1},$$

所以，$$A_9=A_1=\left(4\sin^2 0-3\right)\left(4\sin^2\frac{\pi}{2}-3\right)=-3.$$

四、**解** 设这个六位数为 $\overline{abcdef}$，由题设，可设

$$\overline{abcdef}=k\cdot\overline{abc}\cdot\overline{def},$$

即 $$\overline{abc}\cdot 1000+\overline{def}=k\cdot\overline{abc}\cdot\overline{def},$$

所以 $\overline{abc}\,\big|\,\overline{def}$，记 $\overline{def}=l\cdot\overline{abc}$, $l\in\{1,2,\cdots,9\}$，于是有

$$kl\cdot\overline{abc}^2=(1000+l)\overline{abc},$$

即 $$kl\cdot\overline{abc}=1000+l,$$

从而，$l\,|\,1000$，故 l =1，2，或 5.

若 l =1，则 $k\cdot\overline{abc}=1001=7\times 11\times 13$，只能是 $k=7$, $\overline{abc}=143$，此时，六位数 $\overline{abcdef}$ =143143.

若 l =2，则 $\overline{abc}<500$，且 $2k\cdot\overline{abc}=1002$，$k\cdot\overline{abc}=501=3\times 167$，只能是 k =3，$\overline{abc}=167$，此时，六位数 $\overline{abcdef}$ =167334.

若 l =5，则 $\overline{abc}<200$，且 $5k\cdot\overline{abc}=1005$，$k\cdot\overline{abc}=201=3\times 67$，这不可能.

综上所述，所求的六位数为 143143，167334.

2008 年上海市 T I 杯高二年级数学竞赛答案

团体赛试题答案

一、**解** （1）由题设

$$\sum_{i=1}^{4}P_iA_i^{\ 2}=\sum_{i=1}^{4}(ax_i^2-y_i)^2=a^2\sum_{i=1}^{4}x_i^4-2a\sum_{i=1}^{4}x_i^2y_i+\sum_{i=1}^{4}y_i^2$$

$$=\sum_{i=1}^{4}x_i^4\left(a^2-\frac{2\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2y_i}{\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^4}+\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2y_i}{\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^4}\right)^2\right)+\sum_{i=1}^{4}y_i^2-\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2y_i}{\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^4}\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{4}x_i^4\left(a-\frac{\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2y_i}{\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^4}\right)^2+\sum_{i=1}^{4}y_i^2-\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2y_i}{\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^4}\right)^2,$$

故当$a=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2y_i}{\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^4}$时，$\sum\limits_{i=1}^{4}P_iA_i^2$取最小值$\sum\limits_{i=1}^{4}y_i^2-\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2y_i}{\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^4}\right)^2$.

（2）对题设的数据，可得

$$\sum_{i=1}^{4}x_i^4=1^2+2^2+3^2+4^2=354,$$

$$\sum_{i=1}^{4}x_i^2y_i=1^2\times(-2.6)+2^2\times(-9.9)+3^2\times(-22.6)+4^2\times(-39.8)=-882.4,$$

于是，由（1）知，$a=\dfrac{-882.4}{354}\approx-2.49$.

所以，欲求的轨道曲线是$y=-2.49x^2$.

二、**解** 由于 $t_{n+20}-t_n=\dfrac{(n+20)(n+20+1)}{2}-\dfrac{n(n+1)}{2}$

$$=20n+210=(2n+21)\cdot10,$$

即t_{n+20}与t_n的末位数相同，所以，20 是此循环小数的循环节的长度．这个循环小数为：

$$0.\dot{1}360518655681506310\dot{0}.$$

三、**解** (1) 由于$3n^2+n+1$是大于 3 的奇数，故 $f(n)\neq 1$.

若 $f(n)=2$，则$3n^2+n+1$只能为首位和末位为 1，其余数码为 0 的一个数，即$3n^2+n+1=10^k+1$，k 是大于 1 的整数．于是

$$n(3n+1)=2^k\cdot 5^k,$$

由于$(n,3n+1)=1$，所以

$$\begin{cases} n=2^k, \\ 3n+1=5^k, \end{cases}$$

于是

$$3n+1\leq 4n=4\cdot 2^k<5^k,$$

矛盾！故 $f(n)\neq 2$.

（2）当 n=8 时，$3n^2+n+1$=201，所以 $f(8)=3$.