2004 年上海市 TI 杯高二年级数学竞赛

个人赛试题

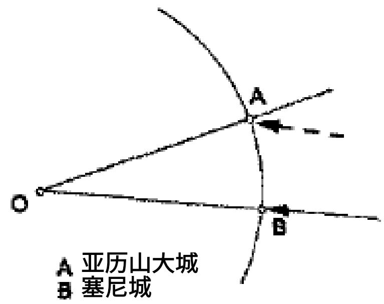
(2004 年 5 月 23 日上午 9:00~10:30)

一、填空题(共8 题，前4小题每题6分，后4小题每题9分，满分60分)

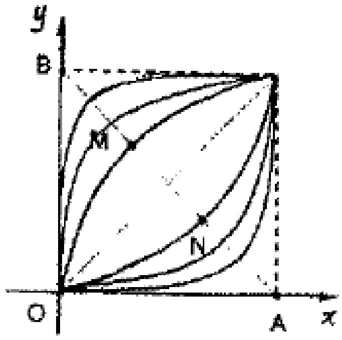
1．方程 $x^2+x=(\frac{e^2}{\pi})^3$ 的一个正根是_____________(精确到0.0001)，其中 π 是圆周率，e=2.71828…是自然对数的底。

2．某乡改革开放后，农民生活水平普遍提高，经调查，该乡有洗衣机、冰箱、彩电的农户分别占全乡农户总数的77%、80%、91%；又知拥有冰箱和洗衣机、彩电和洗衣机、彩电和冰箱的农户分别占全乡农户总数的58%、70%、72%；冰箱、洗衣机、彩电都没有的仅占 1%, 则该乡农户中冰箱、彩电、洗衣机都有的占________% 。

3．公元前240年左右，古希腊数学家埃拉托色尼住在亚历山大城，据测量夏至正午太阳光偏离该地铅垂方向7.2°，他又了解到，该城正南 800 千米处的塞尼城夏至正午太阳正好悬在头顶，他由此算出了地球经线的周长和半径。请你算一下，地球经线的周长为____________千米，半径为______________千米(精确到 1 千米) 。



4．幂函数 $y=x^{\alpha}$ ，当α取不同的正数时，在区间[0,1] 上它们的图象是一族美丽的曲线，如图所示。设点A(1,0)，B(0,1)，连结AB，线段AB恰好被其中的两个幂函数 $y=x^{\alpha},y=x^{\beta}$ 的图象三等分，即有 BM=MN=NA, 那么α+β=___________，α·β=______________________(要求精确到 0.001) 。

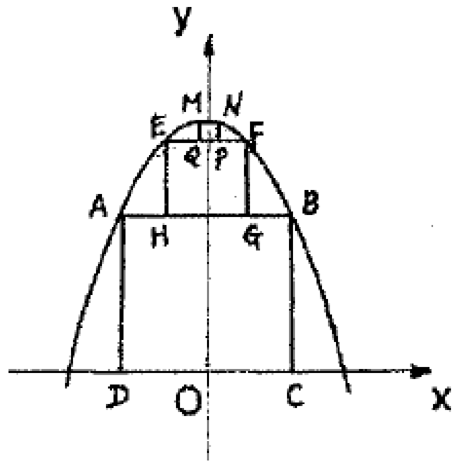


5．使得不等式 9^n 十$10^n<11^n$ 成立的正整数 n 的最小值是_______________。

6．将$\sin(2004^{2004})°$化为$\sin\alpha(-90° < \alpha \le 90°)$，则$\alpha=$__________________。

7．已知$x, y, z \in R$，且 $x+y+z=0$，$xyz=1$，则这三个数中最大数的最小值是________________。

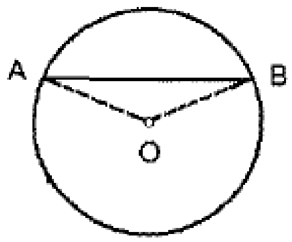
8．在建造一个截面为抛物线形隧道时，用了三种规格的正方形支架，如图所示。如果抛物线方程为 $y=-x^2+c$，正方形ABCD的边长与正方形 EFGH 的边长之比为 5∶1，则正方形MNPQ的边长为____________________。



解答以下三题必须写出解题的必要步骤。

二、(本题满分 20 分)

已知圆 O 中的弦 AB 将圆分成面积为 1∶3 的弓形，求 A 圆心角∠AOB 的大小 (要求精确到 1′或 0.001 弧度) 。



三、(本题满分 20 分)

把 1,2,3, …, 2004 这 2004 个正整数随意放置在一个圆周上，统计所有相邻三个数的奇偶性得知：三个数全是奇数的有 600 组，恰好两个奇数的有 500 组，问：恰好一个奇数的有几组？全部不是奇数的有几组？

四、(本题满分 20 分)

集合$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2-10x-16y+81<0\}$，$B=\{(x,y)\mid y \ge |x-t|+8\}$。

(1) 若$A\cap B \ne \varnothing$，求实数 t 的取值范围 ；

(2) 设点$P(t,8)\in A$，集合 A,B 所表示的两个平面区域的边界相交于点 M ,N，求$\frac{1}{|PM|}+\frac{1}{|PN|}$的最小值。